

Aventure statistique sur le cercle

BACH Jessica⁽¹⁾ NICOSIA Aurélien⁽²⁾

⁽¹⁾Maîtrise en statistique, Université Laval

⁽²⁾Doctorat en mathématiques (statistique), Université Laval

13 mars 2014

Présentation des conférenciers

Présentation des conférenciers

Jessica Bach

- Baccalauréat en statistique, Université Laval
- Maîtrise en statistique, Université Laval

Présentation des conférenciers

Jessica Bach

- Baccalauréat en statistique, Université Laval
- Maîtrise en statistique, Université Laval

Aurélien Nicosia

- Licence de mathématiques, Université Toulouse III
- Master recherche en probabilités et statistique, Université Toulouse III
- Doctorat en mathématiques (statistique), Université Laval

Aperçu

- 1 Statistique directionnelle
- 2 Applications
- 3 Données
 - Statistiques descriptives
 - Construction de loi sur le cercle
- 4 Statistiques
 - Régression
 - Estimation des paramètres
 - Théorèmes limites
- 5 Caractérisation de la von Mises

Définition

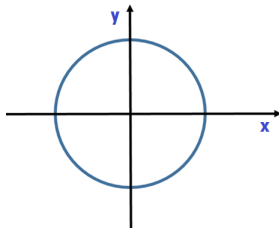
La statistique directionnelle regroupe plusieurs échantillons:

- statistique circulaire
- statistique sphérique
- etc.

Définition

La statistique directionnelle regroupe plusieurs échantillons:

- statistique circulaire
- statistique sphérique
- etc.



Définition

La statistique circulaire:

Définition

La statistique circulaire:

- une extension de la statistique classique
- une statistique directionnelle du plan
- représentée par des données qui sont des directions sur un cercle unité (des angles)

Exemples d'application

Les domaines d'application de la statistique circulaire sont nombreux:

Exemples d'application

Les domaines d'application de la statistique circulaire sont nombreux:

- météorologie: direction du vent, quantité de précipitation

Exemples d'application

Les domaines d'application de la statistique circulaire sont nombreux:

- météorologie: direction du vent, quantité de précipitation
- biologie: déplacement animal



Exemples d'application

Les domaines d'application de la statistique circulaire sont nombreux:

- météorologie: direction du vent, quantité de précipitation
- biologie: déplacement animal



- psychologie, physique, santé, astronomie, science politique, etc.

Exemples d'application

Motivations des recherches dans ce domaine:

Exemples d'application

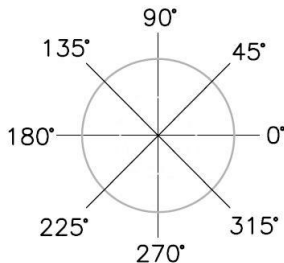
Motivations des recherches dans ce domaine:

- évolution de la technologie (GPS, etc)
- propriétés des angles qui se diffèrent des données classiques

Exemples d'application

Motivations des recherches dans ce domaine:

- évolution de la technologie (GPS, etc)
- propriétés des angles qui se diffèrent des données classiques



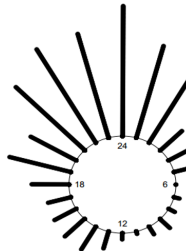
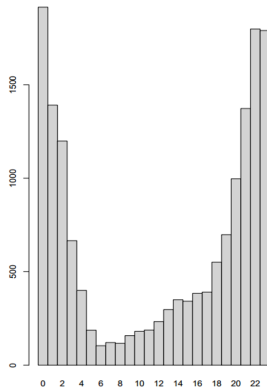
Exemples d'application

Jusqu'à présent, les exemples impliquent des directions (des angles).
Les données cycliques aussi utilisent la statistique directionnelle.

Exemples d'application

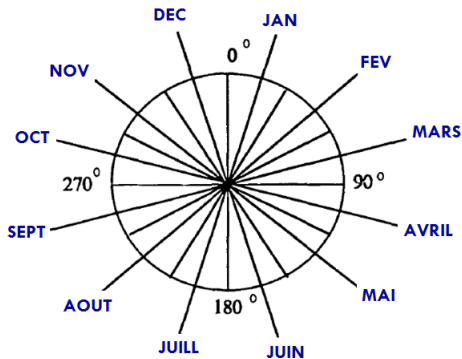
Jusqu'à présent, les exemples impliquent des directions (des angles).
Les données cycliques aussi utilisent la statistique directionnelle.

Exemple:



Exemples d'application

Exemple:



Données

En terme de direction, un angle θ est le même que $\theta + 2k\pi$.

Données

En terme de direction, un angle θ est le même que $\theta + 2k\pi$.

→ Comment représenter un angle en prenant en compte la périodicité?

Données

En terme de direction, un angle θ est le même que $\theta + 2k\pi$.

→ Comment représenter un angle en prenant en compte la périodicité?

Soit p un vecteur du cercle unité S^1 ,

Données

En terme de direction, un angle θ est le même que $\theta + 2k\pi$.

→ Comment représenter un angle en prenant en compte la périodicité?

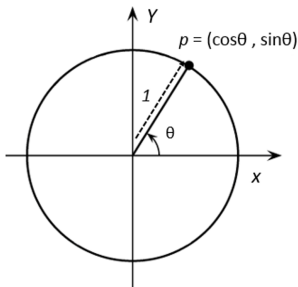
Soit p un vecteur du cercle unité S^1 , alors $p = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$
non unique.

Données

En terme de direction, un angle θ est le même que $\theta + 2k\pi$.

→ Comment représenter un angle en prenant en compte la périodicité?

Soit p un vecteur du cercle unité S^1 , alors $p = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$ non unique.

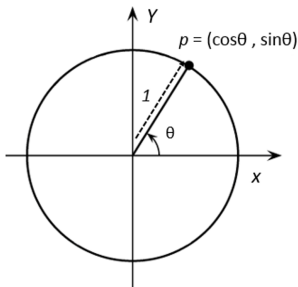


Données

En terme de direction, un angle θ est le même que $\theta + 2k\pi$.

→ Comment représenter un angle en prenant en compte la périodicité?

Soit p un vecteur du cercle unité S^1 , alors $p = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$ non unique.



→ On prend en compte la périodicité des angles!

Statistique descriptive

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points du cercle,

Statistique descriptive

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points du cercle, alors il existe $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi[$ tels que: $x_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

Statistique descriptive

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points du cercle, alors il existe $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi[$ tels que: $x_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

Centre de masse:

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \theta_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right) := (\bar{C}, \bar{S})$$

→ deux indices statistiques:

Statistique descriptive

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points du cercle, alors il existe $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi[$ tels que: $x_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$
Centre de masse:

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \theta_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right) := (\bar{C}, \bar{S})$$

→ deux indices statistiques:

$\bar{\theta}$ et $\bar{R}$

- Direction moyenne: $\bar{\theta} = \arctan^* \left(\frac{\bar{S}}{\bar{C}} \right)$
- Longueur résultante: $\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$

Mesure de dispersion

$\bar{R}$ est la longueur du centre de masse, ainsi

Mesure de dispersion

$\bar{R}$ est la longueur du centre de masse, ainsi

- $\theta_1, \dots, \theta_n$ concentrés $\Rightarrow \bar{R} \simeq 1$
- $\theta_1, \dots, \theta_n$ dispersés $\Rightarrow \bar{R} \simeq 0$

Mesure de dispersion

$\bar{R}$ est la longueur du centre de masse, ainsi

- $\theta_1, \dots, \theta_n$ concentrés $\Rightarrow \bar{R} \simeq 1$
- $\theta_1, \dots, \theta_n$ dispersés $\Rightarrow \bar{R} \simeq 0$

→ mesure de dispersion:

Variance circulaire

$$\bar{V} = 1 - \bar{R}$$

Mesure de dispersion

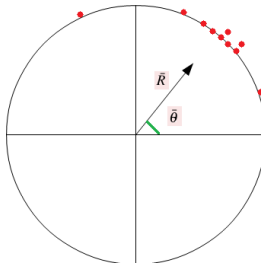
$\bar{R}$ est la longueur du centre de masse, ainsi

- $\theta_1, \dots, \theta_n$ concentrés $\Rightarrow \bar{R} \simeq 1$
- $\theta_1, \dots, \theta_n$ dispersés $\Rightarrow \bar{R} \simeq 0$

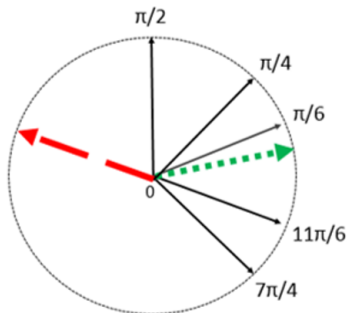
→ mesure de dispersion:

Variance circulaire

$$\bar{V} = 1 - \bar{R}$$



Exemple



Longueur de la résultante : 0.6603

Variance circulaire : 0.3397

Statistique classique vs angulaire

	Statistique classique ($\mathbb{R}$)	Statistique angulaire (S^1)
Echantillon	$x_1, \dots, x_n$	$\theta_1, \dots, \theta_n$
Moyenne	$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{\theta} = \arctan^* \left(\frac{\bar{S}}{\bar{C}} \right)$
Variance	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}$	$\bar{V} = 1 - \bar{R}$

Construction de loi sur le cercle

Plusieurs moyens de définir des lois sur le cercle:

Loi sur le cercle

1. En définissant une loi directement sur le cercle

Construction de loi sur le cercle

Plusieurs moyens de définir des lois sur le cercle:

Loi sur le cercle

1. En définissant une loi directement sur le cercle
2. En adaptant des lois classiques (de $\mathbb{R}$) au cercle

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

- $f(\theta) \geq 0$

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

- $f(\theta) \geq 0$
- f est 2π -périodique

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

- $f(\theta) \geq 0$
- f est 2π -périodique
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

- $f(\theta) \geq 0$
- f est 2π -périodique
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$

→ fonction caractéristique

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

- $f(\theta) \geq 0$
- f est 2π -périodique
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$

→ fonction caractéristique

Soit Θ une v.a.a.¹, alors

$$\phi_1 := \mathbb{E}(e^{i\Theta}) = \rho e^{i\mu}$$

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

- $f(\theta) \geq 0$
- f est 2π -périodique
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$

→ fonction caractéristique

Soit Θ une v.a.a.¹, alors

$$\phi_1 := \mathbb{E}(e^{i\Theta}) = \rho e^{i\mu}$$

μ : Direction moyenne

¹Variable aléatoire angulaire

Densité sur le cercle

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si:

- $f(\theta) \geq 0$
- f est 2π -périodique
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$

→ fonction caractéristique

Soit Θ une v.a.a.¹, alors

$$\phi_1 := \mathbb{E}(e^{i\Theta}) = \rho e^{i\mu}$$

μ : Direction moyenne

ρ : Longueur de la résultante

¹Variable aléatoire angulaire

Loi uniforme

Loi uniforme sur le cercle: $\mathcal{U}(S^1)$

La loi uniforme sur le cercle admet pour densité:

Loi uniforme

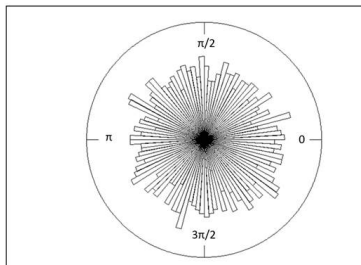
Loi uniforme sur le cercle: $\mathcal{U}(S^1)$

La loi uniforme sur le cercle admet pour densité:

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[$$

Simulation d'une loi uniforme sur le cercle:



Loi de von Mises

La plus importante de toutes....

Loi de von Mises

La plus importante de toutes....

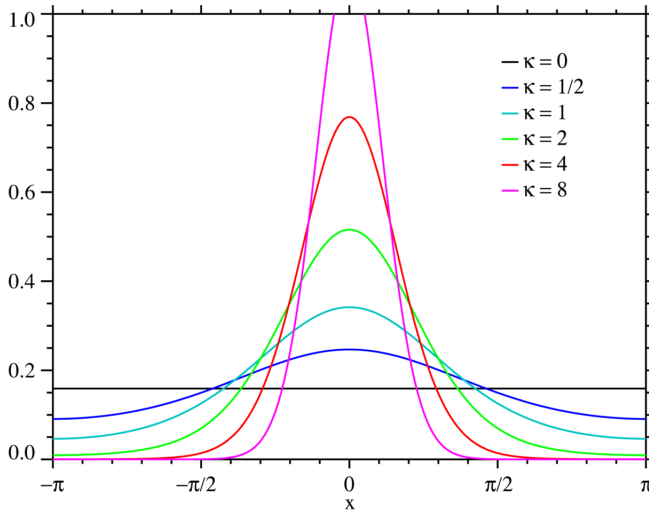
Loi de von Mises $VM(\mu, \kappa)$

La loi de von Mises de paramètres μ et κ a pour densité:

$$f(\theta|\mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}$$

où $I_p(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) e^{\kappa \cos(\theta)} d\theta$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre p

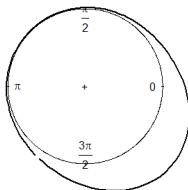
Loi de von Mises



Loi de von Mises

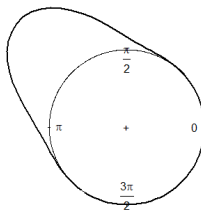
$$\mu = -\frac{\pi}{4} \text{ et } \kappa = 2$$

von Mises



$$\mu = \frac{3\pi}{4} \text{ et } \kappa = 7$$

von Mises



Lois projetées

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire (non nul p.s.²) de $\mathbb{R}^2$. Alors on peut définir un vecteur aléatoire correspondant sur le cercle par:

²presque sûrement

Lois projetées

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire (non nul p.s.²) de $\mathbb{R}^2$. Alors on peut définir un vecteur aléatoire correspondant sur le cercle par:

Projection

$$\begin{array}{lll} \text{Projection} & : & \text{v.a. de } \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{v.a.a.} \\ & & \mathbf{X} \mapsto \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \end{array}$$

²presque sûrement

Lois projetées

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire (non nul p.s.²) de $\mathbb{R}^2$. Alors on peut définir un vecteur aléatoire correspondant sur le cercle par:

Projection

$$\begin{array}{lll} \text{Projection} & : & \text{v.a. de } \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{v.a.a.} \\ & & \mathbf{X} \mapsto \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \end{array}$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{X}$ est une normale bivariée, on définit:

Loi normale projetée

Soit $\mathbf{X} \rightsquigarrow N_2(\mu, \Sigma)$, alors $\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}$ est appelé loi normale projetée, que l'on note: $PN_2(\mu, \Sigma)$

²presque sûrement

Lois enroulées

Soit X une variable aléatoire réelle, alors on définit la loi enroulée associée X_ω par:

Lois enroulées

Soit X une variable aléatoire réelle, alors on définit la loi enroulée associée X_ω par:

Loi enroulée

Processus d'enroulement de loi réelle:

$$X_\omega = X(\text{mod}2\pi)$$

Lois enroulées

Soit X une variable aléatoire réelle, alors on définit la loi enroulée associée X_ω par:

Loi enroulée

Processus d'enroulement de loi réelle:

$$X_\omega = X(\text{mod}2\pi)$$

Ainsi $X_\omega = \theta$ lorsque $X = \theta + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

Lois enroulées

Soit X une variable aléatoire réelle, alors on définit la loi enroulée associée X_ω par:

Loi enroulée

Processus d'enroulement de loi réelle:

$$X_\omega = X(\text{mod}2\pi)$$

Ainsi $X_\omega = \theta$ lorsque $X = \theta + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Par exemple, la densité de la nouvelle loi s'obtient par:

$$f_{X_\omega}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_X(\theta + 2k\pi)$$

Lois enroulées

Soit X une variable aléatoire réelle, alors on définit la loi enroulée associée X_ω par:

Loi enroulée

Processus d'enroulement de loi réelle:

$$X_\omega = X \pmod{2\pi}$$

Ainsi $X_\omega = \theta$ lorsque $X = \theta + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Par exemple, la densité de la nouvelle loi s'obtient par:

$$f_{X_\omega}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_X(\theta + 2k\pi)$$

ATTENTION: Transformation non unique!

Une infinité de X donne la même loi enroulée X_ω .

Exemple de loi enroulée

On va bien sûr enrouler la loi normale!

Exemple de loi enroulée

On va bien sûr enrouler la loi normale!

Loi normale enroulée

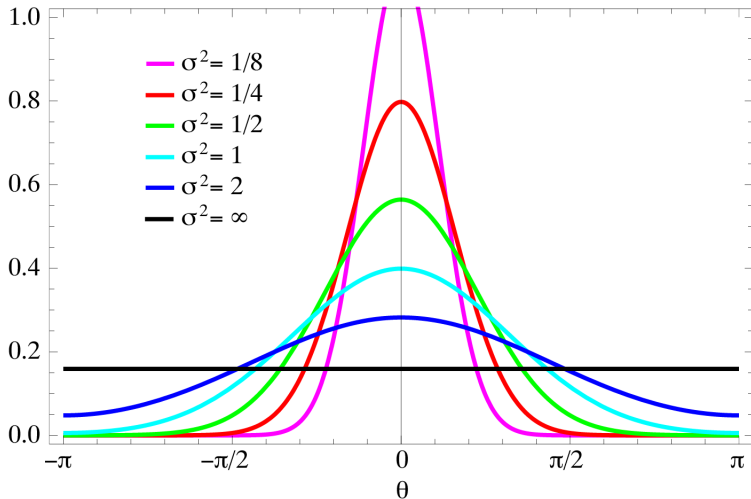
On définit la loi normale enroulée de paramètres μ et ρ , notée $WN(\mu, \rho)$, par l'enroulement:

$$N(\mu, -2\log \rho) \xrightarrow{\omega} WN(\mu, \rho)$$

$$\sigma^2 = -2\log \rho$$

- Direction moyenne: μ
- Longueur de la résultante: ρ

Loi normale enroulée



Exemple de loi enroulée

La loi de Cauchy $C(\mu, \gamma)$ a pour densité:

$$f(x|\mu, \gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma + (x - \mu)^2}$$

On la connaît surtout, car elle n'admet pas de moment...mais on peut l'enrouler autour du cercle:

Exemple de loi enroulée

La loi de Cauchy $C(\mu, \gamma)$ a pour densité:

$$f(x|\mu, \gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma + (x - \mu)^2}$$

On la connaît surtout, car elle n'admet pas de moment...mais on peut l'enrouler autour du cercle:

Loi de Cauchy enroulée

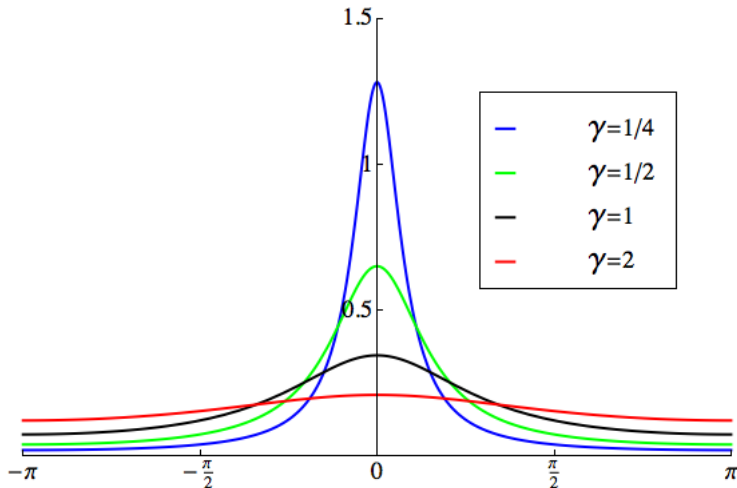
La loi de Cauchy enroulée de paramètres μ, γ , notée $WC(\mu, \gamma)$ est définie par l'enroulement:

$$C(\mu, -\log \gamma) \xrightarrow{\omega} WC(\mu, \gamma)$$

Direction moyenne: μ

Longueur de la résultante: γ

Loi de Cauchy enroulée



Régression

Régression

Comment étudier le lien qui existe entre deux variables dont au moins une des deux variables est une variable angulaire?

Régression

Comment étudier le lien qui existe entre deux variables dont au moins une des deux variables est une variable angulaire?

Types de régression

- Régression angle-linéaire
- Régression linéaire-angulaire
- Régression angle-angle

Régression angle-linéaire

Soit le modèle de régression classique que l'on connaît:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i$$

où $\beta_j \forall i \in \{0, 1, \dots, p\}$ sont des paramètres inconnus et ε est l'erreur résiduelle de loi $N(0, \sigma^2)$.

Régression angle-linéaire

Soit le modèle de régression classique que l'on connaît:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i$$

où $\beta_j \forall i \in \{0, 1, \dots, p\}$ sont des paramètres inconnus et ε est l'erreur résiduelle de loi $N(0, \sigma^2)$.

Exemple de régression

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cos x_i + \beta_2 \sin x_i + \varepsilon_i$$

Régression linéaire-angle

Régression linéaire-angle

Fonction de lien

Une fonction de lien g est:

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
- g est inversible

Régression linéaire-angle

Fonction de lien

Une fonction de lien g est:

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
- g est inversible

Exemples de fonction

- $g(x) = 2\pi F(x)$

Régression linéaire-angle

Fonction de lien

Une fonction de lien g est:

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
- g est inversible

Exemples de fonction

- $g(x) = 2\pi F(x)$
- $g(x) = 2 \arctan(x)$

Régression linéaire-angle

Fonction de lien

Une fonction de lien g est:

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
- g est inversible

Exemples de fonction

- $g(x) = 2\pi F(x)$
- $g(x) = 2 \arctan(x)$
- $g(x) = 2\pi [\Phi(x) - 0.5]$

Régression linéaire-angle

Fonction de lien

Une fonction de lien g est:

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}^1$
- g est inversible

Exemples de fonction

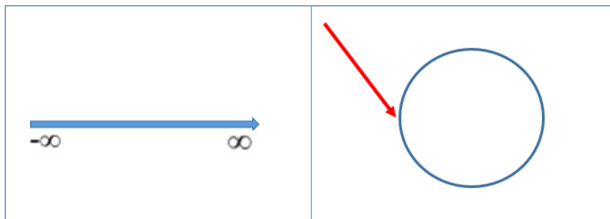
- $g(x) = 2\pi F(x)$
- $g(x) = 2 \arctan(x)$
- $g(x) = 2\pi [\Phi(x) - 0.5]$

Exemple de régression

$$y_i = 2 \arctan(x_i - \gamma) + \varepsilon_i$$

Régression linéaire-angle

ATTENTION: La projection de cette droite revient à associer l'intervalle $(-\infty, \infty)$ à l'intervalle $(-\pi, \pi)$...



Régression angle-angle

Modèles

Modèle simpliste: $Y = \beta X + \varepsilon$

Modèle rotationnel: $Y = X + \beta + \varepsilon$

Modèle plus complexe: $Y = f(X; \beta) + \varepsilon$

Régression angle-angle

Modèles

Modèle simpliste: $Y = \beta X + \varepsilon$

Modèle rotationnel: $Y = X + \beta + \varepsilon$

Modèle plus complexe: $Y = f(X; \beta) + \varepsilon$

Deux identités bien utiles

$$x = \text{atan}(\sin x, \cos x),$$

$$x = 2 \arctan\{\tan(x/2)\}.$$

Régression angle-angle

Modèles

Modèle simpliste: $Y = \beta X + \varepsilon$

Modèle rotationnel: $Y = X + \beta + \varepsilon$

Modèle plus complexe: $Y = f(X; \beta) + \varepsilon$

Deux identités bien utiles

$$x = \text{atan}(\sin x, \cos x),$$

$$x = 2 \arctan\{\tan(x/2)\}.$$

Par exemple:

$$\underbrace{x}_{\text{un angle}} \implies \underbrace{\tan(x/2)}_{\text{un réel}} \implies \underbrace{2 \arctan\{\tan(x/2)\}}_{\text{un angle}}.$$

Exemple de régression angle-angle

Modèle décentré

$$y_i = \beta + \underbrace{\text{atan}\{\sin(x_i - \alpha), \omega + \cos(x_i - \alpha)\}}_{\text{direction pondérée}} + \varepsilon_i \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Exemple de régression angle-angle

Modèle décentré

$$y_i = \beta + \underbrace{\text{atan}\{\sin(x_i - \alpha), \omega + \cos(x_i - \alpha)\}}_{\text{direction pondérée}} + \varepsilon_i \quad (\text{mod } 2\pi).$$

La direction pondérée est un compromis entre $\vec{a}_i$ et $\vec{b}_i$ où

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} \cos(x_i - \alpha) \\ \sin(x_i - \alpha) \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{b}_i = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple de régression angle-angle

Modèle de Möbius

$$y_i = \beta + 2 \arctan \left\{ \omega \tan \frac{1}{2}(x_i - \alpha) \right\} + \varepsilon_i$$

Exemple de régression angle-angle

Modèle de Möbius

$$y_i = \beta + 2 \arctan \left\{ \omega \tan \frac{1}{2}(x_i - \alpha) \right\} + \varepsilon_i$$

Le nom est à l'origine de la transformée de Möbius qui a une fonction $\mathcal{M}$ telle que:

$$\mathcal{M} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

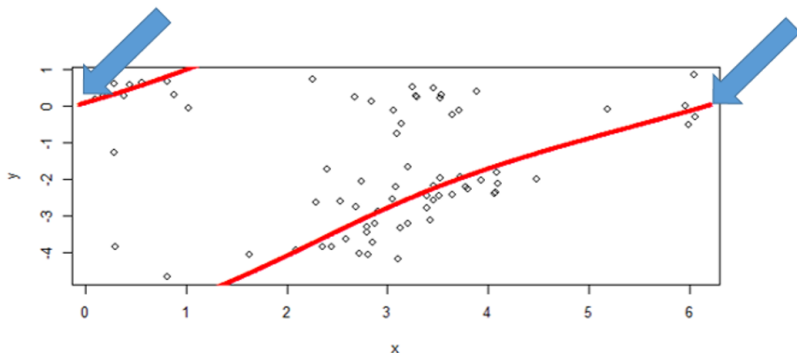
$$\mathcal{M}(v) = \frac{av + b}{cv + d}, \quad v \in \mathbb{C},$$

avec des restrictions sur les paramètres, on obtient

$$\mathcal{M} : S^1 \longrightarrow S^1.$$

Exemple de régression angle-angle

Graphique d'une régression angle-angle:



Estimation des paramètres

Méthodes d'estimation ponctuelle des paramètres:

1. Si la variable réponse est linéaire:

Méthode des moindres carrés

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2$$

Estimation des paramètres

Méthodes d'estimation ponctuelle des paramètres:

1. Si la variable réponse est linéaire:

Méthode des moindres carrés

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2$$

2. Si la variable réponse est angulaire:

Méthode des moindres carrés

$$\sum_{i=1}^n \left\| \begin{pmatrix} \cos y_i \\ \sin y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \hat{y}_i \\ \sin \hat{y}_i \end{pmatrix} \right\|^2$$

Estimation des paramètres

Minimiser la distance des vecteurs de $\mathbb{R}^2$,

$$\sum_{i=1}^n \left\| \begin{pmatrix} \cos y_i \\ \sin y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \hat{y}_i \\ \sin \hat{y}_i \end{pmatrix} \right\|^2,$$

revient à maximiser l'estimateur de l'espérance du cosinus résiduel.

Cosinus résiduel

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos\{y_i - \hat{y}_i\}.$$

Estimation

D'autres méthodes d'estimation classiques fonctionnent :

Estimation

D'autres méthodes d'estimation classiques fonctionnent :

Maximum de vraisemblance

On peut passer par

$$L, \log(L), \frac{\partial(\log(L))}{\partial\beta}$$

où β est un paramètre du modèle.

Estimation

D'autres méthodes d'estimation classiques fonctionnent :

Maximum de vraisemblance

On peut passer par

$$L, \log(L), \frac{\partial(\log(L))}{\partial\beta}$$

où β est un paramètre du modèle.

Méthode des moments

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\cos(t\theta)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(t\theta_i) \\ \mathbb{E}(\sin(t\theta)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(t\theta_i) \end{cases}$$

où t est choisi selon le nombre de paramètres à estimer.

Théorème limite

Théorème central limite angulaire

Soient $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ i.i.d. et absolument continues alors:

$$\Theta_1 + \dots + \Theta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{U}(S^1)$$

Théorème limite

Théorème central limite angulaire

Soient $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ i.i.d. et absolument continues alors:

$$\Theta_1 + \dots + \Theta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{U}(S^1)$$

Loi asymptotique $\bar{\theta}$ et $\bar{R}$

Soient $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ i.i.d. et absolument continues alors:

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{R} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} N_2 \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix}, \Sigma \right)$$

quand n tend vers l'infini.

→ *Pratique*: Intervalle de confiance asymptotique et test d'hypothèse sur μ et ρ .



Caractérisation de la von Mises

Où retrouver la loi de von Mises ?

4 caractérisations dont 3 communes avec la loi normale

Caractérisation

- Loi conditionnelle d'une normale bivariée
- Maximum de vraisemblance du modèle de localisation
- Maximum d'entropie
- Mouvement brownien

Caractérisation de la von Mises

1. Loi conditionnelle

Caractérisation de la von Mises

1. Loi conditionnelle

Soit X une loi normale bivariée telle que:

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \cos \mu \\ \sin \mu \end{pmatrix} \text{ et } \text{Var}(X) = \kappa^{-1} \mathbf{I}_2$$

Caractérisation de la von Mises

1. Loi conditionnelle

Soit X une loi normale bivariée telle que:

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \cos \mu \\ \sin \mu \end{pmatrix} \text{ et } \text{Var}(X) = \kappa^{-1} \mathbf{I}_2$$

Alors en posant $X = R(\cos \Theta, \sin \Theta)$, en coordonnées polaires:

Caractérisation de la von Mises

1. Loi conditionnelle

Soit X une loi normale bivariée telle que:

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \cos \mu \\ \sin \mu \end{pmatrix} \text{ et } \text{Var}(X) = \kappa^{-1} \mathbf{I}_2$$

Alors en posant $X = R(\cos \Theta, \sin \Theta)$, en coordonnées polaires:

$$(\Theta | R = 1) \rightsquigarrow VM(\mu, \kappa)$$

Caractérisation de la von Mises

2. Maximum de vraisemblance

Caractérisation de la von Mises

2. Maximum de vraisemblance

Soit un modèle de localisation:

$$\{f(\theta; \mu) = g(\theta - \mu); \mu \in [0, 2\pi[\}$$

avec g définie sur le cercle.

Caractérisation de la von Mises

2. Maximum de vraisemblance

Soit un modèle de localisation:

$$\{f(\theta; \mu) = g(\theta - \mu); \mu \in [0, 2\pi[\}$$

avec g définie sur le cercle.

Si l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ est $\bar{\theta}$, alors, f est la densité de von Mises

Caractérisation de la von Mises

3. Maximum d'entropie

Caractérisation de la von Mises

3. Maximum d'entropie

Entropie

Soit f une fonction de densité définie sur A , alors l'entropie associée à f est:

$$H(f) = - \int_A f(t) \log f(t) dt$$

Caractérisation de la von Mises

3. Maximum d'entropie

Entropie

Soit f une fonction de densité définie sur A , alors l'entropie associée à f est:

$$H(f) = - \int_A f(t) \log f(t) dt$$

- Si $A = \mathbb{R}$ et que σ^2 associée à f est fixée, alors la loi normale $N(., \sigma^2)$ maximise l'entropie.

Caractérisation de la von Mises

3. Maximum d'entropie

Entropie

Soit f une fonction de densité définie sur A , alors l'entropie associée à f est:

$$H(f) = - \int_A f(t) \log f(t) dt$$

- Si $A = \mathbb{R}$ et que σ^2 associée à f est fixée, alors la loi normale $N(., \sigma^2)$ maximise l'entropie.
- Si $A = [0, 2\pi[$ et que μ, ρ sont fixées, alors $VM(\mu, \rho)$ maximise l'entropie

Caractérisation de la von Mises

3. Maximum d'entropie

Entropie

Soit f une fonction de densité définie sur A , alors l'entropie associée à f est:

$$H(f) = - \int_A f(t) \log f(t) dt$$

- Si $A = \mathbb{R}$ et que σ^2 associée à f est fixée, alors la loi normale $N(., \sigma^2)$ maximise l'entropie.
- Si $A = [0, 2\pi[$ et que μ, ρ sont fixées, alors $VM(\mu, \rho)$ maximise l'entropie

→ Statistique bayésienne: Loi a priori

Caractérisation de la von Mises

4. Mouvement brownien

Caractérisation de la von Mises

4. Mouvement brownien

Rappel sur le mouvement brownien (m.b.):

Soit T un horizon de temps fixé. Le mouvement brownien est défini par:

Caractérisation de la von Mises

4. Mouvement brownien

Rappel sur le mouvement brownien (m.b.):

Soit T un horizon de temps fixé. Le mouvement brownien est défini par:

$(B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien s'il vérifie:

Caractérisation de la von Mises

4. Mouvement brownien

Rappel sur le mouvement brownien (m.b.):

Soit T un horizon de temps fixé. Le mouvement brownien est défini par:

$(B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien s'il vérifie:

(i) $B_0 = 0$ p.s.

Caractérisation de la von Mises

4. Mouvement brownien

Rappel sur le mouvement brownien (m.b.):

Soit T un horizon de temps fixé. Le mouvement brownien est défini par:

$(B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien s'il vérifie:

- (i) $B_0 = 0$ p.s.
- (ii) $\forall 0 \leq s \leq t < T$, l'accroissement $B_t - B_s$ est gaussien:

$$B_t - B_s \rightsquigarrow N(0, t - s)$$

Caractérisation de la von Mises

4. Mouvement brownien

Rappel sur le mouvement brownien (m.b.):

Soit T un horizon de temps fixé. Le mouvement brownien est défini par:

$(B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien s'il vérifie:

- (i) $B_0 = 0$ p.s.
- (ii) $\forall 0 \leq s \leq t < T$, l'accroissement $B_t - B_s$ est gaussien:

$$B_t - B_s \rightsquigarrow N(0, t - s)$$

- (iii) Pour tout partitionnement $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_d < T\}$, les accroissements $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i \in \{1, \dots, d\}}$ sont indépendants.

Simulation

Simulation d'un mouvement brownien sur $[0,1]$:



M.b. drifté et bidimensionnel

Mouvement brownien drifté: mouvement brownien dont on force la direction

M.b. drifté et bidimensionnel

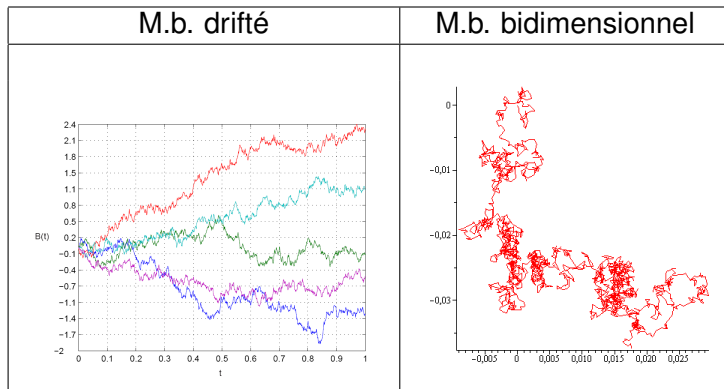
Mouvement brownien drifté: mouvement brownien dont on force la direction

Mouvement brownien bidimensionnel: $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ avec B^1, B^2 deux m.b. indépendants.

M.b. drifté et bidimensionnel

Mouvement brownien drifté: mouvement brownien dont on force la direction

Mouvement brownien bidimensionnel: $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ avec B^1, B^2 deux m.b. indépendants.



Caractérisation de la von Mises

Théorème

Soit $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien bidimensionnel, $\kappa > 0$ et $u \in S^1$.

Caractérisation de la von Mises

Théorème

Soit $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien bidimensionnel, $\kappa > 0$ et $u \in S^1$. On définit ainsi le processus drifté suivant:

$$\mathbf{X}_t = \kappa t \mathbf{u} + \mathbf{W}_t$$

$\forall t \geq 0$. Soit le temps d'arrêt $T := \inf\{t > 0, \|\mathbf{X}_t\| \geq 1\}$, alors:

Caractérisation de la von Mises

Théorème

Soit $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien bidimensionnel, $\kappa > 0$ et $u \in S^1$. On définit ainsi le processus drifté suivant:

$$\mathbf{X}_t = \kappa t \mathbf{u} + \mathbf{W}_t$$

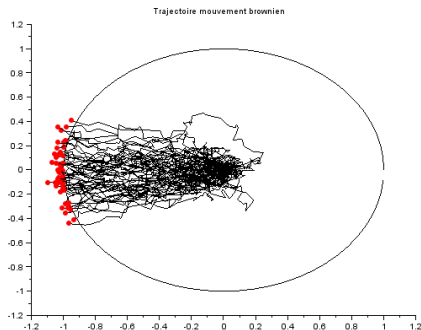
$\forall t \geq 0$. Soit le temps d'arrêt $T := \inf\{t > 0, \|\mathbf{X}_t\| \geq 1\}$, alors:

$$\mathbf{X}_T \rightsquigarrow VM(\mu, \kappa)$$

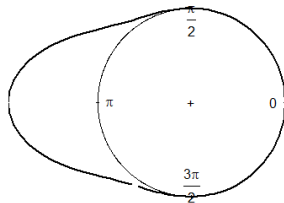
où $\mu \in [0, 2\pi[$ est l'angle associé à u .

Simulation

Exemple avec $\mu = \pi$ et $\kappa = 6$:

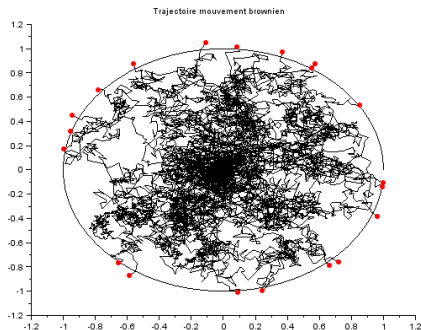


von Mises

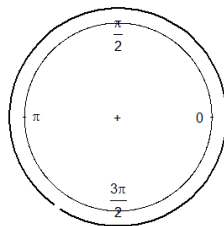


Simulation

Exemple avec $\mu = \pi$ et $\kappa = 0$:



von Mises



Quelques rappels

Quelques rappels

- "Aventure statistique sur le cercle" : initiation à ce domaine

Quelques rappels

- "Aventure statistique sur le cercle" : initiation à ce domaine
- Statistique circulaire : statistique directionnelle du cercle unité

Quelques rappels

- "Aventure statistique sur le cercle" : initiation à ce domaine
- Statistique circulaire : statistique directionnelle du cercle unité
- Données circulaire : directions, heures, mois, etc.

Si l'occasion se présente, rappelez-vous qu'il est parfois préférable d'utiliser la statistique directionnelle.

Logiciels

Vous ne serez pas sans ressource...

Logiciels

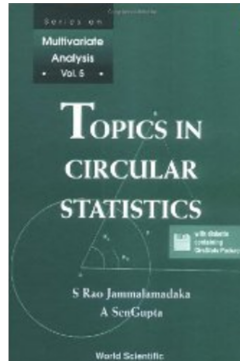
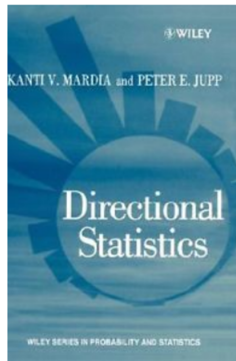
Vous ne serez pas sans ressource...

Depuis environ 15 ans,

- S-Plus
- STATA
- MATLAB
- Oriana
- R

Références

- Mardia, K.V., and Jupp, P.E. Directional Statistics.
- Rao Jammalamadaka, S., and Sengupta, A. Topics in Circular Statistics.



Chercheurs



- Louis-Paul Rivest
- Thierry Duchesne

Merci pour votre attention !

