

Statistique directionnelle et modèle caché ... ou comment modéliser le mouvement d'un animal?

Aurélien Nicosia

Avec Thierry Duchesne, Louis-Paul Rivest et Daniel Fortin

Université Laval

Séminaire de statistique 2015

- 1 Introduction
- 2 Statistique directionnelle
- 3 Les modèles cachés
- 4 Le modèle
- 5 Application
- 6 Conclusion

Quel est le lien entre les photos suivantes ?















Le développement de la technologie GPS pour le mouvement des animaux.

Un modèle de déplacement animalier, pourquoi faire ?

Un modèle de déplacement animalier, pourquoi faire ?

Bien comprendre l'organisation spatio-temporelle des animaux permet

Un modèle de déplacement animalier, pourquoi faire ?

Bien comprendre l'organisation spatio-temporelle des animaux permet

→ d'organiser la réintroduction d'espèces animales ;

Un modèle de déplacement animalier, pourquoi faire ?

Bien comprendre l'organisation spatio-temporelle des animaux permet

- d'organiser la réintroduction d'espèces animales ;
- de préserver l'intégrité écologique (transport de particules par les animaux) ;

Un modèle de déplacement animalier, pourquoi faire ?

Bien comprendre l'organisation spatio-temporelle des animaux permet

- d'organiser la réintroduction d'espèces animales ;
- de préserver l'intégrité écologique (transport de particules par les animaux) ;
- de contrôler le déplacement des animaux dans leurs milieux de vie.

⇒ Les modèles de déplacement animalier sont très utiles en pratique !

⇒ Les modèles de déplacement animalier sont très utiles en pratique !

But ultime : Construire un modèle de simulation, pour les biologistes, qui prédit comment les animaux changent leur comportement par rapport à un changement de leur habitat.

⇒ Les modèles de déplacement animalier sont très utiles en pratique !

But ultime : Construire un modèle de simulation, pour les biologistes, qui prédit comment les animaux changent leur comportement par rapport à un changement de leur habitat.

Donc : Les écologistes ont besoin des statisticiens pour construire les modèles de déplacement animalier.

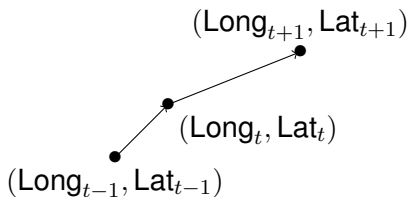


FIGURE: Collier GPS

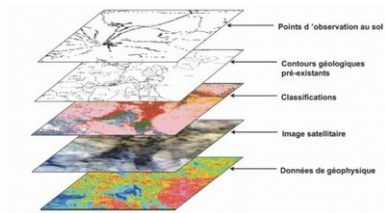


FIGURE: Données environnementales (GIS).

- Le collier GPS nous donne

$(\text{Long}_{t+1}, \text{Lat}_{t+1})$



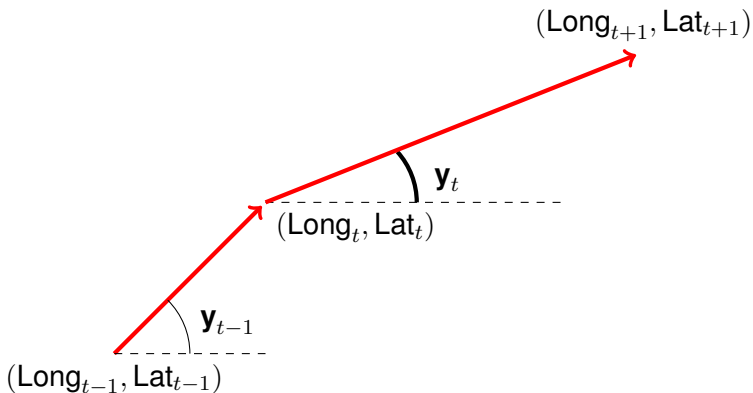
$(\text{Long}_t, \text{Lat}_t)$



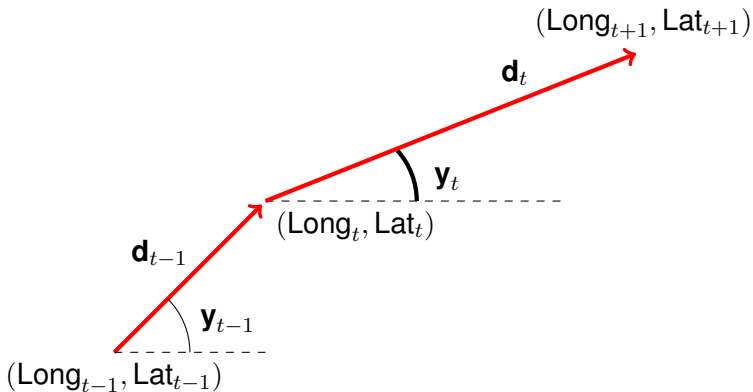
$(\text{Long}_{t-1}, \text{Lat}_{t-1})$



- Le collier GPS nous donne la direction ($\mathbf{y}_t$) de déplacement



- Le collier GPS nous donne la direction ($\mathbf{y}_t$) et distance ($\mathbf{d}_t$) de déplacement



- Les données environnementales sont des directions et des distances de l'animal à des types d'environnement en particulier (cibles).
→ ex : type de végétation, route, prédateur...

Comment traiter les données ?

- Les données environnementales sont des directions et des distances de l'animal à des types d'environnement en particulier (cibles).
→ ex : type de végétation, route, prédateur...

Comment traiter les données ?

✓ distance de déplacement.

- Les données environnementales sont des directions et des distances de l'animal à des types d'environnement en particulier (cibles).
→ ex : type de végétation, route, prédateur...

Comment traiter les données ?

- ✓ distance de déplacement.
- ? direction de déplacement = angle !

Introduction à la statistique directionnelle.

Les données directionnelles peuvent être vues comme des directions ou angles, par exemple

Les données directionnelles peuvent être vues comme des directions ou angles, par exemple

- la direction du vent ;

Les données directionnelles peuvent être vues comme des directions ou angles, par exemple

- la direction du vent ;
- l'heure de connection aux réseaux sociaux ;

Les données directionnelles peuvent être vues comme des directions ou angles, par exemple

- la direction du vent ;
- l'heure de connection aux réseaux sociaux ;
- la direction de déplacement d'un animal ;

Les données directionnelles peuvent être vues comme des directions ou angles, par exemple

- la direction du vent ;
- l'heure de connexion aux réseaux sociaux ;
- la direction de déplacement d'un animal ;

⇒ Données périodiques = données directionnelles.

- Vous vous couchez un soir à $x_1 = 23$ h et le lendemain à $x_2 = 1$ h. A quelle heure vous couchez vous en moyenne ?

- Vous vous couchez un soir à $x_1 = 23$ h et le lendemain à $x_2 = 1$ h. A quelle heure vous couchez vous en moyenne ?

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{23 + 1}{2} = 12 \text{ h}!!$$

- Vous vous couchez un soir à $x_1 = 23$ h et le lendemain à $x_2 = 1$ h. A quelle heure vous couchez vous en moyenne ?

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{23 + 1}{2} = 12 \text{ h}!!$$

Les probabilités et statistiques classiques (dans $\mathbb{R}$) ne fonctionnent plus.

- Vous vous couchez un soir à $x_1 = 23$ h et le lendemain à $x_2 = 1$ h. A quelle heure vous couchez vous en moyenne ?

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{23 + 1}{2} = 12 \text{ h} !!$$

Les probabilités et statistiques classiques (dans $\mathbb{R}$) ne fonctionnent plus.

- La notion d'ordre est beaucoup moins claire avec des angles :

$$1 \text{ degré} = 361 \text{ degrés.}$$

- Vous vous couchez un soir à $x_1 = 23$ h et le lendemain à $x_2 = 1$ h. A quelle heure vous couchez vous en moyenne ?

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{23 + 1}{2} = 12 \text{ h}!!$$

Les probabilités et statistiques classiques (dans $\mathbb{R}$) ne fonctionnent plus.

- La notion d'ordre est beaucoup moins claire avec des angles :

$$1 \text{ degré} = 361 \text{ degrés.}$$

→ **Solution** : Angle = vecteur du cercle unité.

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points du cercle S^1 , alors il existe $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi[$ tels que : $x_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points du cercle S^1 , alors il existe $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi[$ tels que : $x_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

Centre de masse :

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \theta_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right) := (\bar{C}, \bar{S})$$

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points du cercle $\mathcal{S}^1$, alors il existe $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi[$ tels que : $x_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

Centre de masse :

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \theta_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right) := (\bar{C}, \bar{S})$$

→ deux indices statistiques :

$\bar{\theta}$ et $\bar{R}$

- Direction moyenne : $\bar{\theta} = \arctan^* \left(\frac{\bar{S}}{\bar{C}} \right)$
- Longueur résultante : $\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$

Statistique classique Vs angulaire

	Statistique classique ($\mathbb{R}$)	Statistique angulaire (S^1)
Echantillon	$x_1, \dots, x_n$	$\theta_1, \dots, \theta_n$

Statistique classique Vs angulaire

	Statistique classique ($\mathbb{R}$)	Statistique angulaire (S^1)
Echantillon	$x_1, \dots, x_n$	$\theta_1, \dots, \theta_n$
Moyenne	$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{\theta} = \arctan^* \left(\frac{\bar{S}}{\bar{C}} \right)$

Statistique classique Vs angulaire

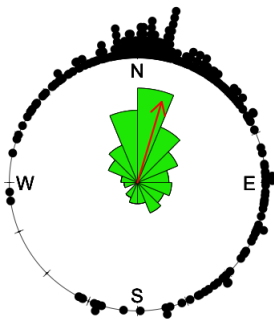
	Statistique classique ($\mathbb{R}$)	Statistique angulaire (S^1)
Echantillon	$x_1, \dots, x_n$	$\theta_1, \dots, \theta_n$
Moyenne	$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{\theta} = \arctan^* \left(\frac{\bar{S}}{\bar{C}} \right)$
Dispersion	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) = 0$	$\sum_{i=1}^n \sin(\theta_i - \bar{\theta}) = 0$

Statistique classique Vs angulaire

	Statistique classique ($\mathbb{R}$)	Statistique angulaire (S^1)
Echantillon	$x_1, \dots, x_n$	$\theta_1, \dots, \theta_n$
Moyenne	$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{\theta} = \arctan^* \left(\frac{\bar{S}}{\bar{C}} \right)$
Dispersion	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) = 0$	$\sum_{i=1}^n \sin(\theta_i - \bar{\theta}) = 0$
Variance	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}$	$\bar{V} = 1 - \bar{R}$

Statistique classique Vs angulaire

	Statistique classique ($\mathbb{R}$)	Statistique angulaire (S^1)
Echantillon	$x_1, \dots, x_n$	$\theta_1, \dots, \theta_n$
Moyenne	$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{\theta} = \arctan^* \left(\frac{\bar{S}}{\bar{C}} \right)$
Dispersion	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) = 0$	$\sum_{i=1}^n \sin(\theta_i - \bar{\theta}) = 0$
Variance	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}$	$\bar{V} = 1 - \bar{R}$



- $n = 310$ directions de vent au Col de la Roa (Alpes, Italie).
- $\bar{\theta} = 0.29$ et $\bar{R} = 0.65$

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle, alors on peut définir :

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle, alors on peut définir :

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si :

- $f(\theta) \geq 0$
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle, alors on peut définir :

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si :

- $f(\theta) \geq 0$
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$
- f est 2π -périodique

Soit Θ une variable aléatoire sur le cercle, alors on peut définir :

Densité de probabilité sur le cercle

On dit que f est une densité sur le cercle si :

- $f(\theta) \geq 0$
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$
- f est 2π -périodique

Attention : La théorie classique ne fonctionne plus ! Par exemple :

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} F(\theta) = \infty!$$

La plus importante de toutes (équivalent de la loi normale dans $\mathbb{R}$) !

La plus importante de toutes (équivalent de la loi normale dans $\mathbb{R}$) !

Loi de von Mises $vM(\mu, \kappa)$

La loi de von Mises de paramètres μ et κ a pour densité :

$$f(\theta|\mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}, \theta \in (-\pi, \pi)$$

La plus importante de toutes (équivalent de la loi normale dans $\mathbb{R}$) !

Loi de von Mises $vM(\mu, \kappa)$

La loi de von Mises de paramètres μ et κ a pour densité :

$$f(\theta|\mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}, \theta \in (-\pi, \pi)$$

où

μ : direction moyenne.

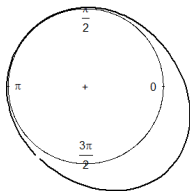
κ : paramètre de concentration.

où $I_p(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) e^{\kappa \cos(\theta)} d\theta$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre p

Représentation graphique de la loi de von Mises

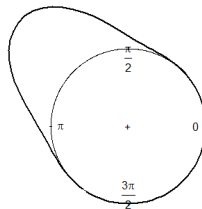
$$\mu = -\frac{\pi}{4} \text{ et } \kappa = 2$$

von Mises



$$\mu = \frac{3\pi}{4} \text{ et } \kappa = 7$$

von Mises



Question : Comment prédire un angle avec des variables explicatives ?

Question : Comment prédire un angle avec des variables explicatives ?

Pour $i = 1, \dots, n$, soit y_i un angle observé, x_i , des angles explicatifs et z_i , des variables explicatives réelles. On définit alors :

Question : Comment prédire un angle avec des variables explicatives ?

Pour $i = 1, \dots, n$, soit y_i un angle observé, $\mathbf{x}_i$, des angles explicatifs et $\mathbf{z}_i$, des variables explicatives réelles. On définit alors :

$$y_i = \underbrace{\mu(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i; \kappa)}_{\text{direction moyenne}} + \epsilon_i$$

où

Question : Comment prédire un angle avec des variables explicatives ?

Pour $i = 1, \dots, n$, soit y_i un angle observé, $\mathbf{x}_i$, des angles explicatifs et $\mathbf{z}_i$, des variables explicatives réelles. On définit alors :

$$y_i = \underbrace{\mu(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i; \kappa)}_{\text{direction moyenne}} + \epsilon_i$$

où

- $\mu(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i; \kappa)$ est la direction du vecteur :

$$\sum_{j=1}^p \kappa_j z_{ij} \begin{pmatrix} \cos(x_{ij}) \\ \sin(x_{ij}) \end{pmatrix}$$

Question : Comment prédire un angle avec des variables explicatives ?

Pour $i = 1, \dots, n$, soit y_i un angle observé, $\mathbf{x}_i$, des angles explicatifs et $\mathbf{z}_i$, des variables explicatives réelles. On définit alors :

$$y_i = \underbrace{\mu(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i; \kappa)}_{\text{direction moyenne}} + \epsilon_i$$

où

- $\mu(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i; \kappa)$ est la direction du vecteur :

$$\sum_{j=1}^p \kappa_j z_{ij} \begin{pmatrix} \cos(x_{ij}) \\ \sin(x_{ij}) \end{pmatrix}$$

- $\epsilon_i \sim vM(0, \ell_i)$, où ℓ_i peut dépendre des prédicteurs.



Exemple de régression angulaire

On observe la direction (y) et distance de déplacement (z) de $n = 31$ escargots.

Question : La direction déplacement est-elle influencée par la distance de déplacement ? Y-a-t-il une direction préférée dans le mouvement de l'escargot ?



Exemple de régression angulaire

On observe la direction (y) et distance de déplacement (z) de $n = 31$ escargots.

Question : La direction déplacement est-elle influencée par la distance de déplacement ? Y-a-t-il une direction préférée dans le mouvement de l'escargot ?

$$y_i = \mu_i + \epsilon_i$$

où ϵ_i von Mises et μ_i est la direction du vecteur :



Exemple de régression angulaire

On observe la direction (y) et distance de déplacement (z) de $n = 31$ escargots.

Question : La direction déplacement est-elle influencée par la distance de déplacement ? Y-a-t-il une direction préférée dans le mouvement de l'escargot ?

$$y_i = \mu_i + \epsilon_i$$

où ϵ_i von Mises et μ_i est la direction du vecteur :

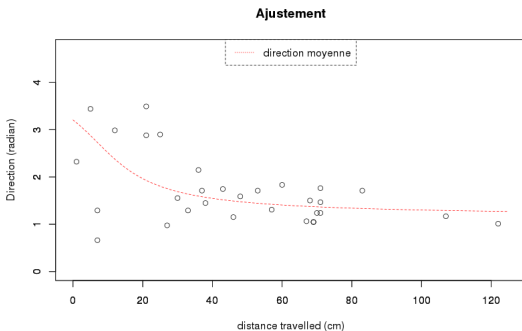
$$\underbrace{\kappa_0 \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} + \kappa_1 \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) \end{pmatrix}}_{\text{biais directionnel}} + \underbrace{\kappa_3 \cdot z_i \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} + \kappa_4 \cdot z_i \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) \end{pmatrix}}_{\text{influence de la distance}}$$



Exemple de régression angulaire

Les résultats :

	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4
estimation	-1.952	-0.122	0.051	0.126
e.s.	0.817	0.855	0.019	0.037



Introduction aux modèles cachés.

Pourquoi du multi-états ?

état 1 état 2

Morale des vidéos :

Morale des vidéos :

→ On espère que Louis-Paul nous revienne sain et sauf !

Morale des vidéos :

- On espère que Louis-Paul nous revienne sain et sauf !
- Il faut prendre en compte que l'animal peut avoir différent comportements.

Morale des vidéos :

- On espère que Louis-Paul nous revienne sain et sauf !
- Il faut prendre en compte que l'animal peut avoir différent comportements.

Problème : Les différents comportements de l'animal sont *non observés* !

Morale des vidéos :

- On espère que Louis-Paul nous revienne sain et sauf !
- Il faut prendre en compte que l'animal peut avoir différents comportements.

Problème : Les différents comportements de l'animal sont *non observés* !

Solution : Modèles cachés.

Supposons que la direction de l'animal est régie par

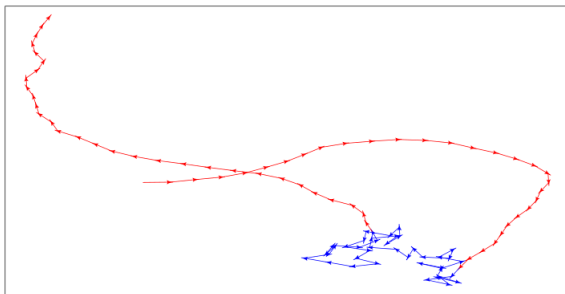
$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \epsilon_t & \text{si } S_t = 1, \\ \mu + \epsilon_t & \text{si } S_t = 2, \end{cases}$$

ou $\epsilon_t \sim \text{vM}(0, \kappa_{S_t})$.

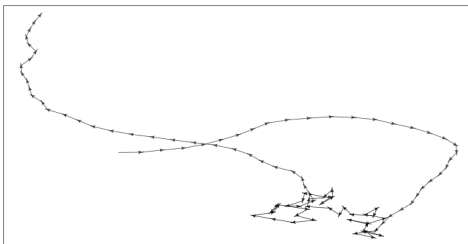
Supposons que la direction de l'animal est régie par

$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \epsilon_t & \text{si } S_t = 1, \\ \mu + \epsilon_t & \text{si } S_t = 2, \end{cases}$$

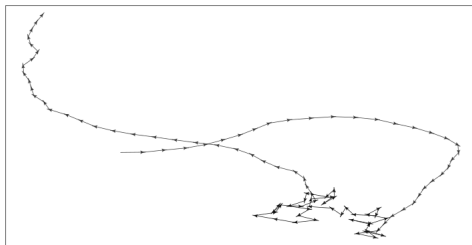
ou $\epsilon_t \sim \text{vM}(0, \kappa_{S_t})$.



En pratique on n'observe pas les états !



En pratique on n'observe pas les états !



Question : Comment bien définir S_t pour coller le plus possible aux données ?

Dans un modèle de mélange :

$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \epsilon_t & \text{avec probabilité } p, \\ \mu + \epsilon_t & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

Dans un modèle de mélange :

$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \epsilon_t & \text{avec probabilité } p, \\ \mu + \epsilon_t & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

ainsi la densité de y_t s'écrit :

$$f(y_t) = pf(y_t|y_{t-1}; \kappa_1) + (1 - p)f(y_t; \mu, \kappa_2)$$

ou $p = \mathbb{P}(S_t = 1)$.

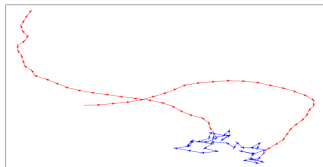
Dans un modèle de mélange :

$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \epsilon_t & \text{avec probabilité } p, \\ \mu + \epsilon_t & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

ainsi la densité de y_t s'écrit :

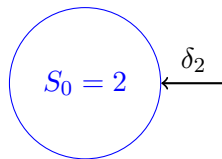
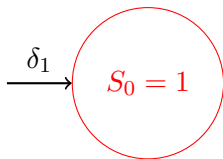
$$f(y_t) = pf(y_t|y_{t-1}; \kappa_1) + (1 - p)f(y_t; \mu, \kappa_2)$$

ou $p = \mathbb{P}(S_t = 1)$.

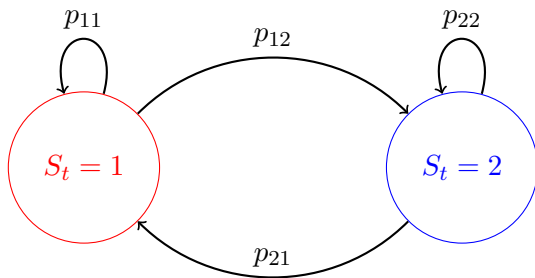


Problème : les S_t sont indépendants et identiquement distribués.

Hidden Markov Model (HMM) : initialisation



Hidden Markov Model (HMM) : processus caché



Hidden Markov Model (HMM) : processus observé

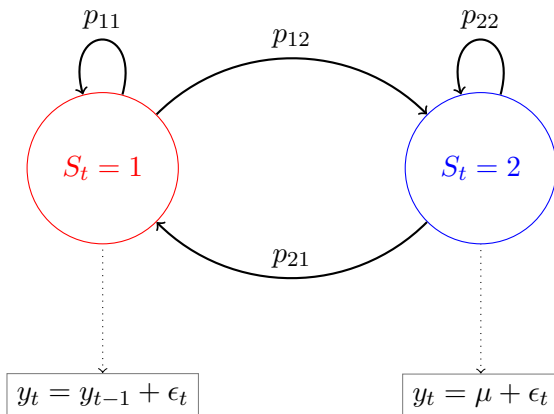
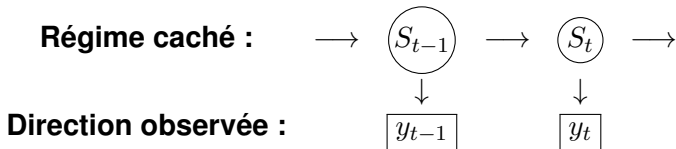
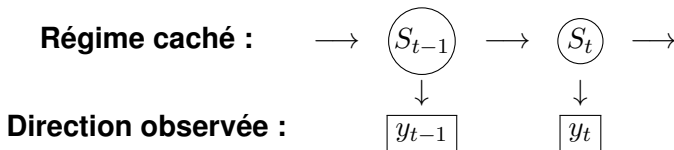


FIGURE: Hidden Markov Model

Hidden Markov Model (HMM)



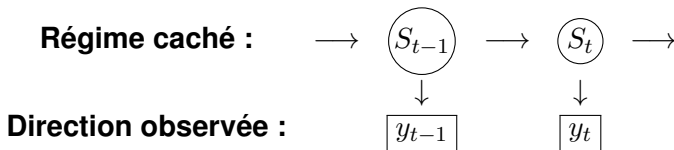
Hidden Markov Model (HMM)



Avantages :

- La loi des observations est différente selon l'état.

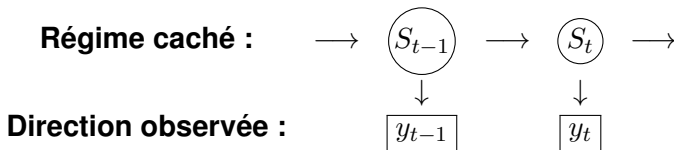
Hidden Markov Model (HMM)



Avantages :

- La loi des observations est différente selon l'état.
- Dépendance des états au cours du temps.

Hidden Markov Model (HMM)

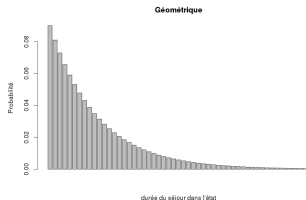


Avantages :

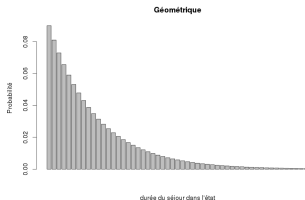
- La loi des observations est différente selon l'état.
- Dépendance des états au cours du temps.

Problème : Parfois biologiquement non raisonnable !

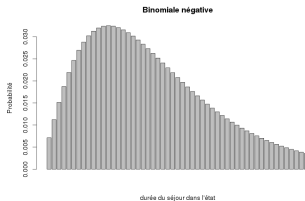
- Dans un HMM classique, la loi du temps de séjour dans un état est géométrique
→ pas réaliste !



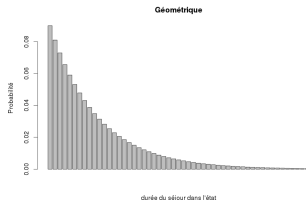
- Dans un HMM classique, la loi du temps de séjour dans un état est géométrique
→ pas réaliste !



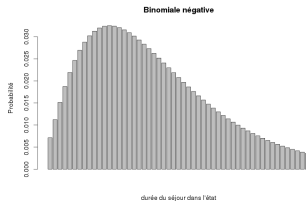
- Dans un Hidden Semi Markov Model (HSMM), temps de séjour = loi discrete positive.
→ ex : binomiale négative.



- Dans un HMM classique, la loi du temps de séjour dans un état est géométrique
→ pas réaliste !



- Dans un Hidden Semi Markov Model (HSMM), temps de séjour = loi discrete positive.
→ ex : binomiale négative.



→ On peut choisir la distribution du temps de séjour.

Notons (A, τ_A) et (B, τ_B) une chaîne semi-Markovienne à deux états.

Notons (A, τ_A) et (B, τ_B) une chaîne semi-Markovienne à deux états.

On peut approximer la chaîne semi-Markovienne par une chaîne de Markov à $m_A + m_B$ états :

$$\underbrace{A_1, A_2, \dots, A_{m_A}}_{m_A \text{ copies de l'état } A}, \underbrace{B_1, B_2, \dots, B_{m_B}}_{m_B \text{ copies de l'état } B}$$

avec une matrice de transition P bien choisie.

Notons (A, τ_A) et (B, τ_B) une chaîne semi-Markovienne à deux états.

On peut approximer la chaîne semi-Markovienne par une chaîne de Markov à $m_A + m_B$ états :

$$\underbrace{A_1, A_2, \dots, A_{m_A}}_{m_A \text{ copies de l'état } A}, \underbrace{B_1, B_2, \dots, B_{m_B}}_{m_B \text{ copies de l'état } B}$$

avec une matrice de transition P bien choisie.

Exemple : si $\tau_A, \tau_B \sim B^-$, alors on prend $m_A = m_B = 30 \dots$
 $\dots \rightarrow$ chaîne de Markov à 60 états !!

Modèle de mouvement animalier
=
régression angulaire
+
modèle de Markov caché

Direction de déplacement (Forme générale)

Si l'animal est dans l'état k ($S_t = k$), on suppose que y_t est prédit par un ensemble de positions disponibles dans les données observées ($\mathcal{F}_{t-1}$) :

$$y_t = \mu_k(y_t | \mathcal{F}_{t-1}; \kappa) + \epsilon_t^k$$

Direction de déplacement (Forme générale)

Si l'animal est dans l'état k ($S_t = k$), on suppose que y_t est prédit par un ensemble de positions disponibles dans les données observées ($\mathcal{F}_{t-1}$) :

$$y_t = \mu_k(y_t | \mathcal{F}_{t-1}; \kappa) + \epsilon_t^k$$

Il reste à définir :

- μ_k : quelles variables vont influencer le déplacement de l'animal ?

Si l'animal est dans l'état k ($S_t = k$), on suppose que y_t est prédit par un ensemble de positions disponibles dans les données observées ($\mathcal{F}_{t-1}$) :

$$y_t = \mu_k(y_t | \mathcal{F}_{t-1}; \kappa) + \epsilon_t^k$$

Il reste à définir :

- μ_k : quelles variables vont influencer le déplacement de l'animal ?
- ϵ_t^k : comment bien définir la concentration ?

$\mu_{\mathbf{k}}(y_t|y_{t-1}, \mathbf{x}_t; \kappa)$ est la direction du vecteur :

$$\underbrace{\kappa_0^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(y_{t-1}) \\ \sin(y_{t-1}) \end{pmatrix}}_{\text{Persistence directionnelle}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \kappa_j^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(x_{jt}) \\ \sin(x_{jt}) \end{pmatrix}}_{\text{Influence de cibles environnementales}}$$

x_{jt} est la direction de la cible j par rapport à l'animal au temps t .

$\mu_{\mathbf{k}}(y_t | y_{t-1}, \mathbf{x}_t; \kappa)$ est la direction du vecteur :

$$\underbrace{\kappa_0^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(y_{t-1}) \\ \sin(y_{t-1}) \end{pmatrix}}_{\text{Persistence directionnelle}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \kappa_j^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(x_{jt}) \\ \sin(x_{jt}) \end{pmatrix}}_{\text{Influence de cibles environnementales}}$$

x_{jt} est la direction de la cible j par rapport à l'animal au temps t .

Interpretation des paramètres :

→ $\kappa_j^{(\mathbf{k})}$ mesure l'influence de la cible j sur la direction de l'animal.

$\mu_{\mathbf{k}}(y_t | y_{t-1}, \mathbf{x}_t; \kappa)$ est la direction du vecteur :

$$\underbrace{\kappa_0^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(y_{t-1}) \\ \sin(y_{t-1}) \end{pmatrix}}_{\text{Persistence directionnelle}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \kappa_j^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(x_{jt}) \\ \sin(x_{jt}) \end{pmatrix}}_{\text{Influence de cibles environnementales}}$$

x_{jt} est la direction de la cible j par rapport à l'animal au temps t .

Interpretation des paramètres :

→ $\kappa_j^{(\mathbf{k})}$ mesure l'influence de la cible j sur la direction de l'animal.

- $\kappa_j^{(\mathbf{k})} < 0$: cible répulsive.

$\mu_{\mathbf{k}}(y_t | y_{t-1}, \mathbf{x}_t; \kappa)$ est la direction du vecteur :

$$\underbrace{\kappa_0^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(y_{t-1}) \\ \sin(y_{t-1}) \end{pmatrix}}_{\text{Persistence directionnelle}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \kappa_j^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(x_{jt}) \\ \sin(x_{jt}) \end{pmatrix}}_{\text{Influence de cibles environnementales}}$$

x_{jt} est la direction de la cible j par rapport à l'animal au temps t .

Interpretation des paramètres :

→ $\kappa_j^{(\mathbf{k})}$ mesure l'influence de la cible j sur la direction de l'animal.

- $\kappa_j^{(\mathbf{k})} < 0$: cible répulsive.
- $\kappa_j^{(\mathbf{k})} \approx 0$: cible non influente.

$\mu_{\mathbf{k}}(y_t | y_{t-1}, \mathbf{x}_t; \kappa)$ est la direction du vecteur :

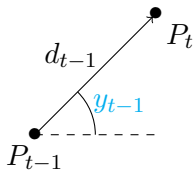
$$\underbrace{\kappa_0^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(y_{t-1}) \\ \sin(y_{t-1}) \end{pmatrix}}_{\text{Persistence directionnelle}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \kappa_j^{(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \cos(x_{jt}) \\ \sin(x_{jt}) \end{pmatrix}}_{\text{Influence de cibles environnementales}}$$

x_{jt} est la direction de la cible j par rapport à l'animal au temps t .

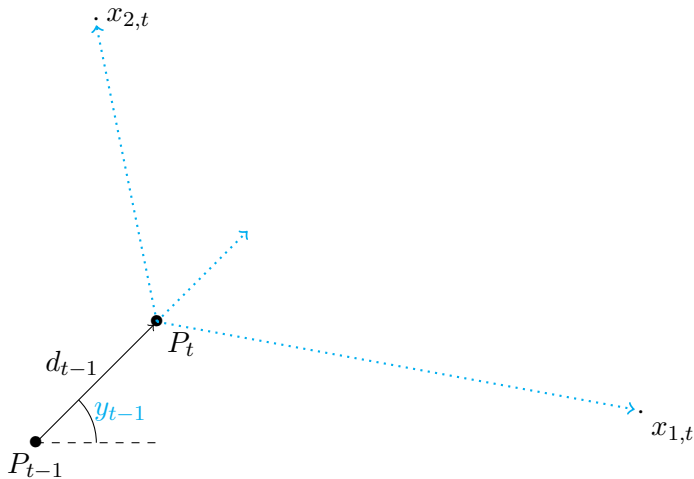
Interpretation des paramètres :

→ $\kappa_j^{(\mathbf{k})}$ mesure l'influence de la cible j sur la direction de l'animal.

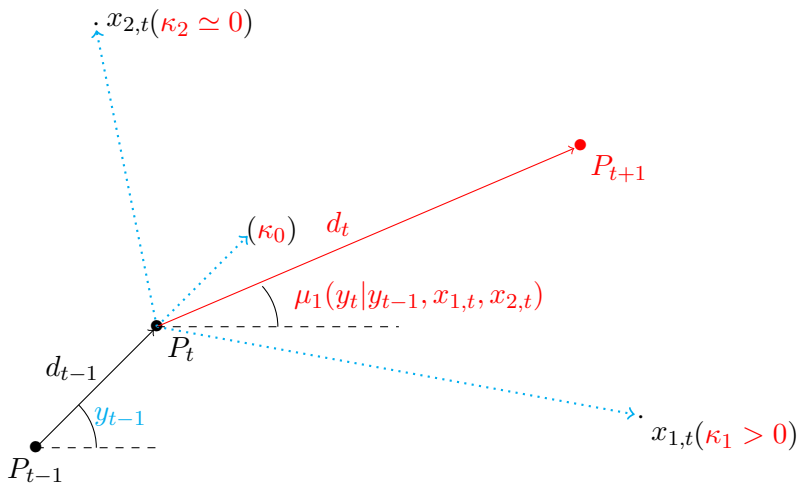
- $\kappa_j^{(\mathbf{k})} < 0$: cible répulsive.
- $\kappa_j^{(\mathbf{k})} \approx 0$: cible non influente.
- $\kappa_j^{(\mathbf{k})} > 0$: cible attractive.



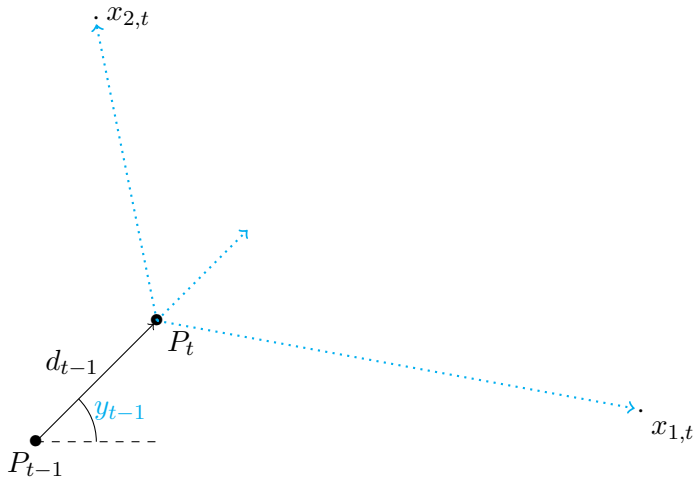
Compromis directionnel - état 1



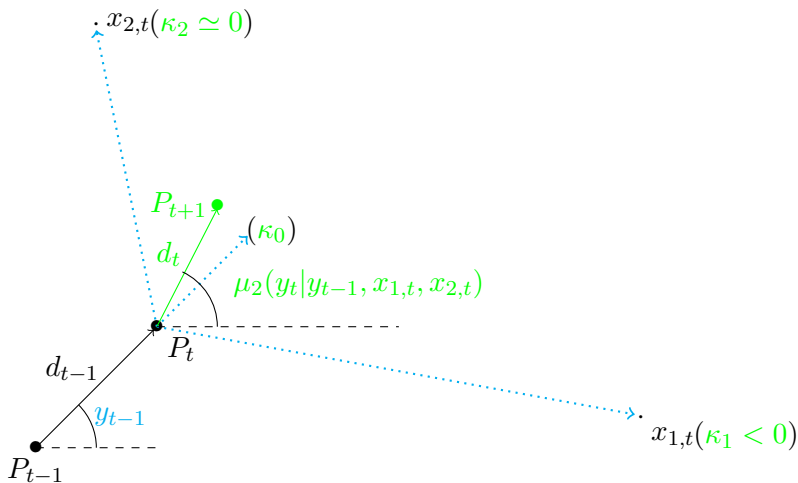
Compromis directionnel - état 1



Compromis directionnel - état 2



Compromis directionnel - état 2



La concentration des erreurs $\ell_t^{(k)}$ est la longueur du vecteur :

$$\kappa_0^{(k)} \begin{pmatrix} \cos(y_{t-1}) \\ \sin(y_{t-1}) \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^p \kappa_j^{(k)} \begin{pmatrix} \cos(x_{jt}) \\ \sin(x_{jt}) \end{pmatrix}$$

Interprétation :

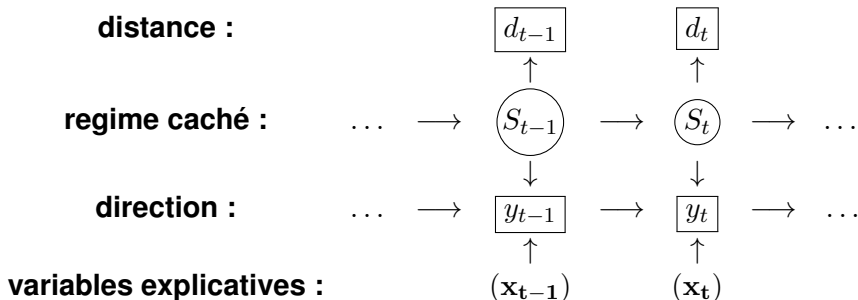
La concentration des erreurs $\ell_t^{(k)}$ est la longueur du vecteur :

$$\kappa_0^{(k)} \begin{pmatrix} \cos(y_{t-1}) \\ \sin(y_{t-1}) \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^p \kappa_j^{(k)} \begin{pmatrix} \cos(x_{jt}) \\ \sin(x_{jt}) \end{pmatrix}$$

Interprétation :

- Si y_{t-1} et $x_{1t}, \dots, x_{pt}$ pointent dans la même direction $\Rightarrow$ la concentration $\ell_t^{(k)}$ est grande (erreur ϵ_t faible).
- La magnitude des erreurs est inversement proportionnelle au degré de consensus entre la persistance directionnelle et les cibles environnementales.

Structure de dépendance



SI les états étaient observés, alors

$$L^c(\kappa, P, \lambda) = \prod_{t=1}^T \underbrace{\mathbb{P}(S_t | S_{t-1})}_{\text{transition}} \underbrace{f(y_t | S_t, \mathcal{F}_{t-1}, \kappa)}_{\text{direction}} \underbrace{g(d_t | S_t, \lambda)}_{\text{distance}}$$

SI les états étaient observés, alors

$$L^c(\kappa, P, \lambda) = \prod_{t=1}^T \underbrace{\mathbb{P}(S_t|S_{t-1})}_{\text{transition}} \underbrace{f(y_t|S_t, \mathcal{F}_{t-1}, \kappa)}_{\text{direction}} \underbrace{g(d_t|S_t, \lambda)}_{\text{distance}}$$

MAIS ce n'est pas le cas !

$$L(\kappa, P, \lambda) = \sum_{(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_T) \in \{1, \dots, \mathbf{K}\}^T} \left(\prod_{t=1}^T \mathbb{P}(S_t|S_{t-1}) f(y_t|S_t, \mathcal{F}_{t-1}, \kappa) g(d_t|S_t, \lambda) \right)$$

ou l'on somme sur toutes les trajectoires du processus caché possibles.

$$L(\kappa, P, \lambda) = \sum_{(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_T) \in \{1, \dots, \mathbf{K}\}^T} \left(\prod_{t=1}^T \mathbb{P}(S_t | S_{t-1}) f(y_t | S_t, \mathcal{F}_{t-1}, \kappa) g(d_t | S_t, \lambda) \right)$$

- Modèle complètement paramétrique $\Rightarrow$ Estimateur du Maximum de Vraisemblance.

$$L(\kappa, P, \lambda) = \sum_{(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_T) \in \{1, \dots, \mathbf{K}\}^T} \left(\prod_{t=1}^T \mathbb{P}(S_t | S_{t-1}) f(y_t | S_t, \mathcal{F}_{t-1}, \kappa) g(d_t | S_t, \lambda) \right)$$

- Modèle complètement paramétrique $\Rightarrow$ Estimateur du Maximum de Vraisemblance.
- Maximisation par l'algorithme EM car $\sum$ possède K^T termes : intractable !

$$L(\kappa, P, \lambda) = \sum_{(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_T) \in \{1, \dots, \mathbf{K}\}^T} \left(\prod_{t=1}^T \mathbb{P}(S_t | S_{t-1}) f(y_t | S_t, \mathcal{F}_{t-1}, \kappa) g(d_t | S_t, \lambda) \right)$$

- Modèle complètement paramétrique $\Rightarrow$ Estimateur du Maximum de Vraisemblance.
- Maximisation par l'algorithme EM car $\sum$ possède K^T termes : intractable !

Dans l'étape E de l'algorithme EM :

- **Problème** : Calculer

$$\mathbb{P}(S_t | \mathcal{F}_T).$$

F. Entrée : $\delta = \mathbb{P}(S_0|\mathcal{F}_0)$:

F. Entrée : $\delta = \mathbb{P}(S_0|\mathcal{F}_0)$:

$$\mathbb{P}(S_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \implies \underbrace{\mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_{t-1})}_{\text{Prédiction}} \xRightarrow{+ \text{Obs.}} \mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_t)$$

F. Entrée : $\delta = \mathbb{P}(S_0|\mathcal{F}_0)$:

$$\mathbb{P}(S_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \Longrightarrow \underbrace{\mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_{t-1})}_{\text{Prédiction}} \xRightarrow{+ \text{ Obs.}} \mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_t)$$

L. Entrée : $\mathbb{P}(S_T|\mathcal{F}_T)$

$$\mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_T) \xRightarrow{\text{Backward}} \mathbb{P}(S_{t-1}|\mathcal{F}_T)$$

F. Entrée : $\delta = \mathbb{P}(S_0|\mathcal{F}_0)$:

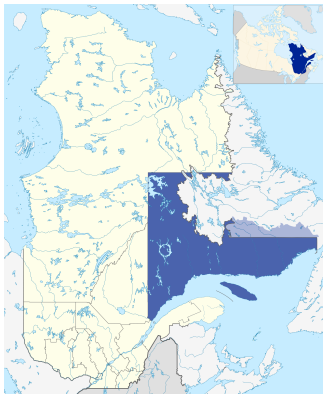
$$\mathbb{P}(S_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \Longrightarrow \underbrace{\mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_{t-1})}_{\text{Prédiction}} \xRightarrow{+ \text{Obs.}} \mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_t)$$

L. Entrée : $\mathbb{P}(S_T|\mathcal{F}_T)$

$$\mathbb{P}(S_t|\mathcal{F}_T) \xRightarrow{\text{Backward}} \mathbb{P}(S_{t-1}|\mathcal{F}_T)$$

$\Rightarrow$ On classifie les localisations de l'animal par état au cours du temps.

Caribou de la Côte-Nord



Côte-Nord, Québec.



Caribou

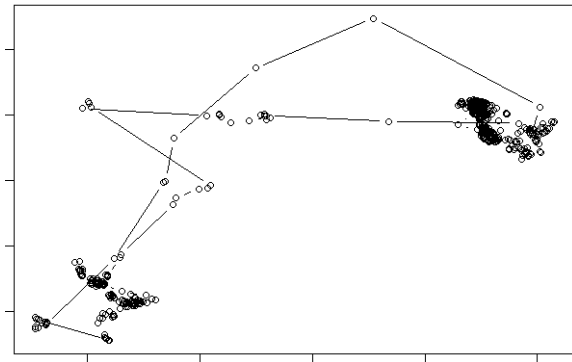


FIGURE: Caribou, forêt Boréale (Canada).

Le système GIS nous donne par exemple :

- **centre** : centroïde des localisations déjà visitées les plus proches (mémoire spatiale) ;
- **road** : route la plus proche ;
- **coupe0** : coupe forestière la plus proche de moins de 5 ans.
- **coupe5** : coupe forestière la plus proche de plus de 5 ans.

Modèle à un état → centre et coupe5 ont de l'effet sur la direction du caribou.

Tableaux des résultats

état 1	Estim.	E.s.	état 2	Estim.	E.s.
$\kappa_{\text{persis.}}$	1.3569(*)	0.3821	$\kappa_{\text{persis.}}$	0.0465	0.0599
κ_{centre}	0.4455	0.3357	κ_{centre}	0.2587(*)	0.0677
κ_{coupe5}	0.1724	0.3285	κ_{coupe5}	0.1480(*)	0.0678
λ	0.3943	0.0804	λ	5.5963	0.2728
p_{11}	0.7436	0.1007	p_{22}	0.9851	0.0068

état 1	Estim.	E.s.	état 2	Estim.	E.s.
$\kappa_{\text{persis.}}$	1.3569(*)	0.3821	$\kappa_{\text{persis.}}$	0.0465	0.0599
κ_{centre}	0.4455	0.3357	κ_{centre}	0.2587(*)	0.0677
κ_{coupe5}	0.1724	0.3285	κ_{coupe5}	0.1480(*)	0.0678
λ	0.3943	0.0804	λ	5.5963	0.2728
p_{11}	0.7436	0.1007	p_{22}	0.9851	0.0068

- **état 1** : forte persistance directionnelle mais pas d'attraction vers les cibles. Grande distance parcouru moyenne : $1/\lambda \approx 2.54$ km au 4h.

Tableaux des résultats

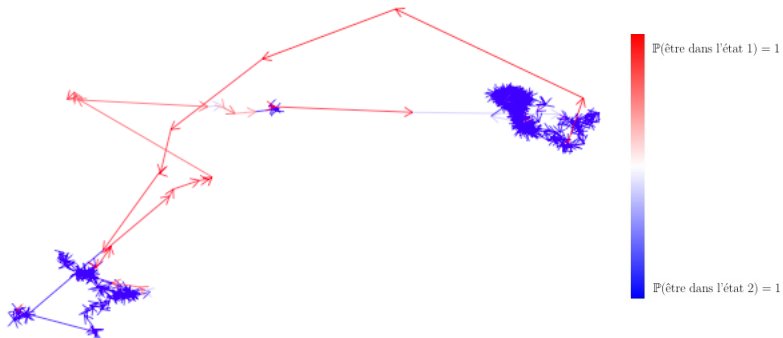
état 1	Estim.	E.s.	état 2	Estim.	E.s.
$\kappa_{\text{persis.}}$	1.3569(*)	0.3821	$\kappa_{\text{persis.}}$	0.0465	0.0599
κ_{centre}	0.4455	0.3357	κ_{centre}	0.2587(*)	0.0677
κ_{coupe5}	0.1724	0.3285	κ_{coupe5}	0.1480(*)	0.0678
λ	0.3943	0.0804	λ	5.5963	0.2728
p_{11}	0.7436	0.1007	p_{22}	0.9851	0.0068

- **état 1** : forte persistance directionnelle mais pas d'attraction vers les cibles. Grande distance parcouru moyenne : $1/\lambda \approx 2.54$ km au 4h.
- **état 2** : pas de persistance directionnelle mais attraction vers les cibles. Petite distance parcouru moyenne : $1/\lambda \approx 0.18$ km au 4h.

état 1	Estim.	E.s.	état 2	Estim.	E.s.
$\kappa_{\text{persis.}}$	1.3569(*)	0.3821	$\kappa_{\text{persis.}}$	0.0465	0.0599
κ_{centre}	0.4455	0.3357	κ_{centre}	0.2587(*)	0.0677
κ_{coupe5}	0.1724	0.3285	κ_{coupe5}	0.1480(*)	0.0678
λ	0.3943	0.0804	λ	5.5963	0.2728
p_{11}	0.7436	0.1007	p_{22}	0.9851	0.0068

- **état 1** : forte persistance directionnelle mais pas d'attraction vers les cibles. Grande distance parcouru moyenne : $1/\lambda \approx 2.54$ km au 4h.
- **état 2** : pas de persistance directionnelle mais attraction vers les cibles. Petite distance parcouru moyenne : $1/\lambda \approx 0.18$ km au 4h.
- $\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.7436 & 0.2564 \\ 0.0149 & 0.9851 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\pi}_{\text{statio.}} = (\mathbf{0.05}, \mathbf{0.95})$

Comportement estimé



On a construit une marche aléatoire générale directionnelle
qui :

On a construit une marche aléatoire générale directionnelle
qui :

- prend en compte les caractéristiques environnementales
et les différents comportements non observés de l'animal ;

On a construit une marche aléatoire générale directionnelle qui :

- prend en compte les caractéristiques environnementales et les différents comportements non observés de l'animal ;
- modélise l'angle de direction et la distance parcouru selon ces différents états.

On a construit une marche aléatoire générale directionnelle qui :

- prend en compte les caractéristiques environnementales et les différents comportements non observés de l'animal ;
- modélise l'angle de direction et la distance parcouru selon ces différents états.

L'application numérique sur le Caribou à montré que

- la distance spécifie bien les comportements cachés mais aussi la direction de déplacement !

On a construit une marche aléatoire générale directionnelle qui :

- prend en compte les caractéristiques environnementales et les différents comportements non observés de l'animal ;
- modélise l'angle de direction et la distance parcouru selon ces différents états.

L'application numérique sur le Caribou à montré que

- la distance spécifie bien les comportements cachés mais aussi la direction de déplacement !
- le processus caché estimé donne une bonne idée spatio-temporelle du comportement de l'animal.

- Équivalence avec d'autres modèles de déplacement (régression logistique conditionnelle).

- Équivalence avec d'autres modèles de déplacement (régression logistique conditionnelle).
- Méthode de maximisation des modèles cachés.

Merci pour votre attention !



A. Nicosia, T. Duchesne, L.-P. Rivest et D. Fortin. A general hidden state random walk model for animal movement.

Submitted

Rivest, L.-P., Duchesne, T., Nicosia, A., et Fortin, D. (2015). A general angular regression model for the analysis of data on animal movement in ecology. *Journal of the Royal Statistical Society, series C*. To appear.